Soluție

1. a) Se verifică prin calcul.

b) Se demonstrează prin inducție după $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Fie X o soluție. Din punctul **a)** deducem că $X = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Cum $\det\left(X^2\right) = 1 \Rightarrow \det(X) = 1$, deci există $t \in [0; 2\pi]$, $X = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$. $X^2 = A \Leftrightarrow \cos 2t = 0$ şi $\sin 2t = 1 \Leftrightarrow t \in \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right\}$.

2. a) Folosind relațiile lui Viète, se obține $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = a$.

b) Din teorema împărțirii cu rest, $\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ şi $q \in \mathbb{R}[X]$, $f = (X-1)^2 \cdot q + \alpha X + \beta$.

Din $\begin{cases} f(1) = \alpha + \beta \\ f'(1) = \alpha \end{cases}$, se obține $\begin{cases} \alpha = a + 8 \\ \beta = -7 \end{cases}$. Restul împărțirii este: $r = (a+8)X - 7$.

c) $\sum_{k=1}^{4} x_k^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{2}{9} < 0$, deci ecuația nu are toate rădăcinile reale